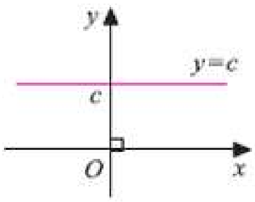
Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$

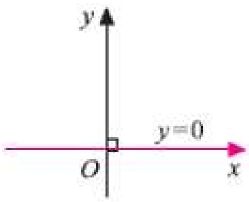
Απόδειξη :

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \text{ , } \textit{οπότε } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$





Άρα $(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$

Απόδειξη :

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$,

και για $h \neq 0$

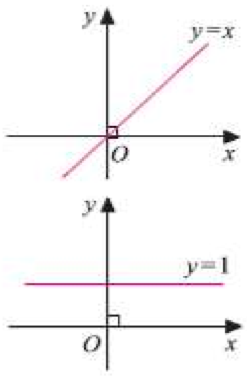
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Άρα $(\boldsymbol{x})' = \mathbf{1}$

(α)



(β)

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{\rho}$ είναι $f'(x) = \rho x^{\rho - 1}$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε :

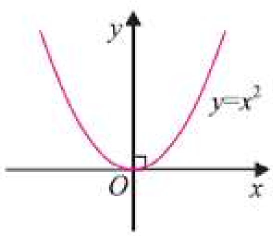
$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h(2x+h)$$

και για $h \neq 0$

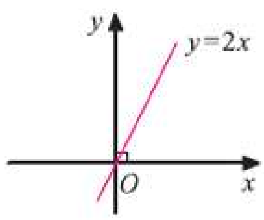
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Επομένως :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$



(α)



(β)

Άρα $(\boldsymbol{x^2})' = \mathbf{2x}$

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ είναι $c \cdot f'(x)$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε :

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c\big(f(x+h) - f(x)\big)$$

Και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Επομένως :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = cf'(x)$$

Άρα $\big(cf(x)\big)' = c \cdot f'(x)$

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ είναι $f'(x) + g'(x)$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε :

$$F(x+h) - F(x) = \big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)$$

$$= \big(f(x+h) - f(x)\big) + \big(g(x+h) - g(x)\big)$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} + \frac{\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}$$

Επομένως :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Άρα $\boldsymbol{\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{0 \leq f_i \leq 1}$

Απόδειξη :

Έχουμε ότι ισχύει $0 \leq \nu_i \leq \nu$ διαιρουμε με ν και προκύπτει ότι :

$$\frac{0}{\nu} \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq \frac{\nu}{\nu}$$

Επομένως : $0 \leq f_i \leq 1$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f_1 + f_2 + f_3 + .. + f_\kappa = 1}$

Απόδειξη :

Έχουμε :

$$f_1 + f_2 + f_3 + .. + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \frac{\nu_3}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + .. + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι ίσος με το μηδέν

Απόδειξη :

Έστω $t_1, t_2, t_3, .., t_\nu$ οι μεταβλητές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν με μέση τιμή $\bar{x}$. Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών , δηλαδή

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + .. + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{\sum(t_i - \bar{x})}{\nu}$$

Είναι ίσος με μηδέν .

Έχουμε :

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + .. + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + .. + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$