ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΛ

Blog: https://papageorgiouxristoforos.blogspot.gr
Email : xristoforospapageorgiou@gmail.com

Τάξη Γ΄ Λυκείου ΕΠΑ.Λ

Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής - Θεωρία

Έκδοση 1η

Παπαγεωργίου Χριστόφορος

Μαθηματικός

Πρέβεζα 2017

blog: https://papageorgiouxristoforos.blogspot.gr

email: xrtistoforospapageorgiou@gmail.com

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση ;

Απάντηση :

Συνάρτηση ονομάζουμε μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B .

2. Να ορίσετε την διαφορά , το άθροισμα , το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων .

Απάντηση :

Αν δυο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δυο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)\,, x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)\,, x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)\,, x \in A$
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$

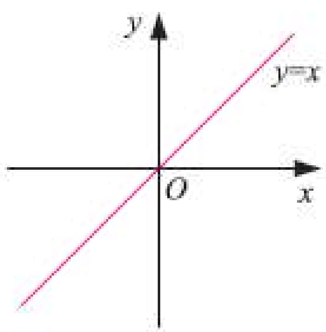
3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της f , με πεδίο ορισμού το σύνολο Α;

Απάντηση :

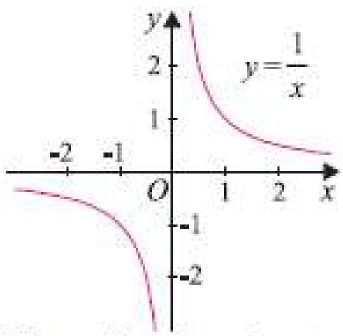
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ονομάζουμε **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη** της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για όλα τα $x \in A$

4. Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις : $y = x$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$

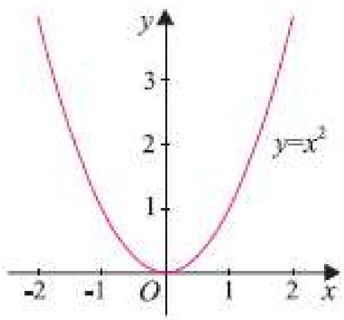
Απάντηση :



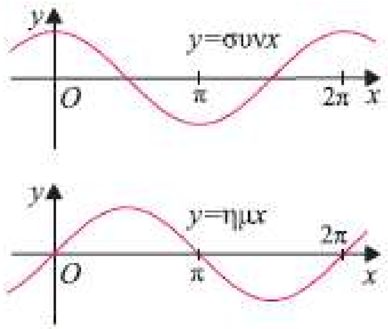
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.



(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x)=$ ημx και $g(x)=$ συνx είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ,όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ,όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

*Σχόλια :

- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ονομάζεται **γνησίως μονότονη**

7. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\boldsymbol{A}$ λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_2

8. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\boldsymbol{A}$ λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_1

*Σχόλια :

- Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης , τοπικά ή ολικά ακρότατα της συνάρτησης .

9. Να αναφέρετε τις ιδιότητες των ορίων

Απάντηση :

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς , δηλαδή αν

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί , τότε αποδυκνύεται ότι

- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(\kappa f(x)\right) = \kappa l_1$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{\nu} = {l_1}^{\nu}$
- $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ονομάζεται συνεχής ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ονομάζεται συνεχής , αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*Σχόλια :

- Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις , πολυωνυμικές , τριγωνομετρικές και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις .

11. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της αν υπάρχει το όριο

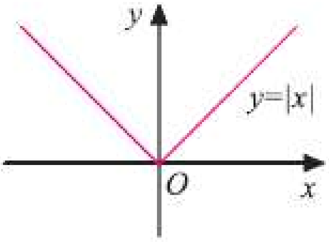
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός .Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{x_0}$** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Έχουμε λοιπόν :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Σχόλια :

- Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο . Όπως είναι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_0 = 0$. Διότι όταν $h < 0$ έχουμε :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1$$
Ενώ όταν το $h > 0$,έχουμε :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$
Που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$



12. Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$;

Απάντηση :

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το x όταν το $x = x_0$

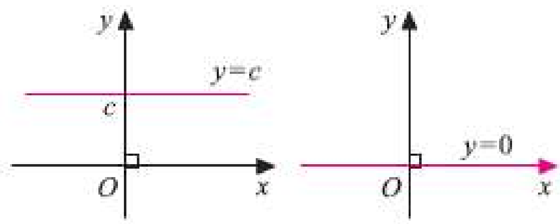
13. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$

Απόδειξη :

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0\,,\, οπότε\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$



Άρα $(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$

14. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$

Απόδειξη :

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$,

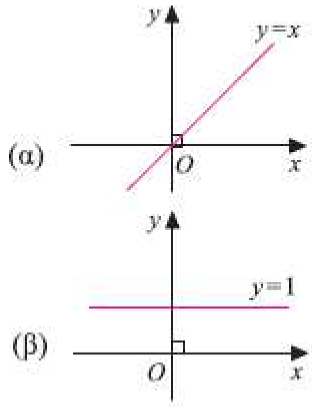
και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Άρα $(\boldsymbol{x})'=\mathbf{1}$



15. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{\rho}$ είναι $f'(x)=\rho x^{\rho-1}$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε :

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=h(2x+h)$$

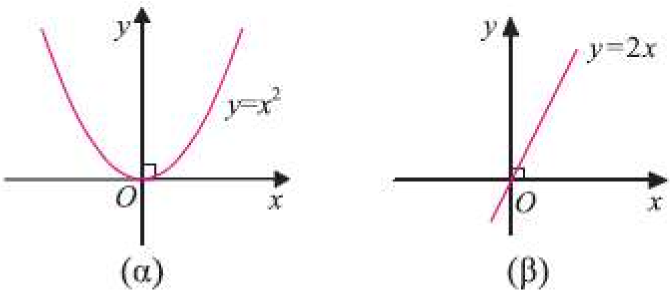
και για $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

Επομένως :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Άρα $(\boldsymbol{x^2})'=\mathbf{2}\boldsymbol{x}$



16. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ είναι $c\cdot f'(x)$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε :

$$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\big(f(x+h)-f(x)\big)$$

Και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$$

Άρα $\big(cf(x)\big)'=c\cdot f'(x)$

17. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$ είναι $f'(x)+g'(x)$

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε :

$$F(x+h)-F(x)=\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)$$
$$=\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)$$

και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}+\frac{\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}$$

Επομένως :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Άρα $\boldsymbol{\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)}$

18. Να αναφέρετε τους κανόνες παραγώγισης του γινομένου και του πηλίκου

Απάντηση :

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

19. Να αναφέρετε τον τύπο της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης και πως την παραγωγίζουμε

Απάντηση :

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει :

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

Για να παραγωγίσουμε την συνάρτηση $f\big(g(x)\big)$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g .

20. Να γράψετε τους βασικούς τύπους και κανόνες παραγώγισης

Απάντηση :

•	$(c)' = 0$	•	$\left(cf(x)\right)' = c \cdot f'(x)$
•	$(x)' = 1$	•	$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
•	$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	•	$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
•	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	•	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
•	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	•	$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$
•	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$		

21. Πότε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ;

Απάντηση :

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχυει $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

22. Πότε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ ;

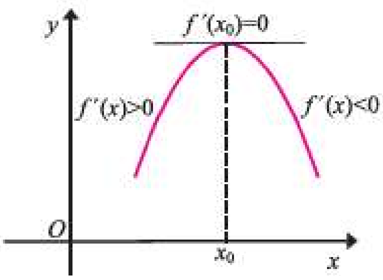
Απάντηση :

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχυει $f'(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

23. Διατυπώστε το κριτήριο της 1ης παραγώγου για το τοπικό μέγιστο στο διάστημα (α, β)

Απάντηση :

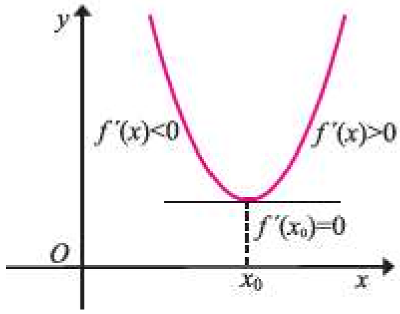
Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο .



24. Διατυπώστε το κριτήριο της $1^{ης}$ παραγώγου για το τοπικό ελάχιστο στο διάστημα (α,β)

Απάντηση :

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο .



*Σχόλια :

- Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και η παράγωγος της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό .

2^{O} ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

25. Τι ονομάζουμε στατιστική ;

Απάντηση :

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για :

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων

26. Τι ονομάζουμε πληθυσμό ;

Απάντηση :

Πληθυσμό ονομάζουμε ένα σύνολο που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά .

27. Τι ονομάζουμε μεταβλητές ; και τι τιμές μεταβλητής ;

Απάντηση :

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε ένα πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα X , Y , Z , B ..

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**

28. Σε ποιες κατηγορίες χωρίζονται οι μεταβλητές ; και σε ποιες οι ποσοτικές μεταβλητές ;

Απάντηση :

Οι μεταβλητές χωρίζονται στις εξής κατηγορίες :

1) Σε **ποιοτικές ή κατηγορικές** μεταβλητές των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί .
2) Σε **ποσοτικές** μεταβλητές , των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται :
   i. Σε **διακριτές** μεταβλητές , που παίρνουν μόνο « μεμονωμένες» τιμές
   ii. Σε **συνεχείς** μεταβλητές , που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β)

29. Τι ονομάζουμε δείγμα ;

Απάντηση :

Δείγμα ονομάζουμε μια μικρή ομάδα ή ένα υποσύνολο το πληθυσμού από όπου ο ερευνητής συλλέγει πληροφορίες όταν η απογραφή είναι δύσκολη . Κάνει τις παρατηρήσεις του στο δείγμα αυτό και μετά γενικεύει τα συμπεράσματα του για ολόκληρο τον πληθυσμό .

30. Τι ονομάζουμε συχνότητα ν_i ;

Απάντηση :

Συχνότητα ν_i ονομάζετε ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων .

Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος , δηλαδή : $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + .. + \nu_\kappa = \nu$

31. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i ;

Απάντηση :

Σχετική συχνότητα f_i ονομάζουμε το πηλίκο της συχνότητας ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος συμβολίζεται με f_i και δίνεται από τον τύπο :

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \, , i = 1,2,3, .. , \kappa$$

32. Να αποδείξετε ότι $0 \leq f_i \leq 1$

Απόδειξη :

Έχουμε ότι ισχύει $0 \leq \nu_i \leq \nu$ διαιρουμε με ν και προκύπτει ότι :

$$\frac{0}{\nu} \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq \frac{\nu}{\nu}$$

Επομένως : $0 \leq f_i \leq 1$

33. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + f_3 + .. + f_\kappa = 1$

Απόδειξη :

Έχουμε :

$$f_1 + f_2 + f_3 + .. + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \frac{\nu_3}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + .. + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

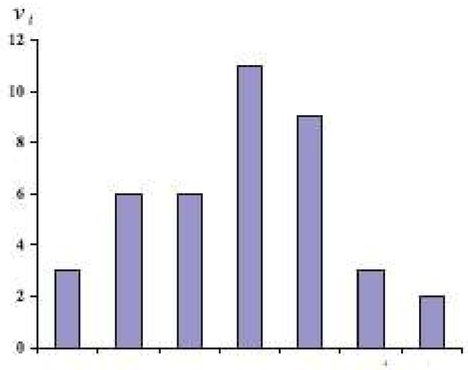
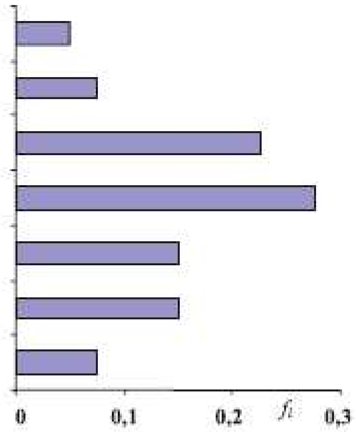
34. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα συχνοτήτων και τι σχετικών συχνοτήτων και για ποιές μεταβλητές χρησιμοποιείται ;

Απάντηση :

Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα . Σε κάθε τιμή της μεταβλητής Χ αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα . Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων** .

Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής .

*Παράδειγμα :

Ραβδόγραμμα	
Συχνοτήτων	**Σχετικών Συχνοτήτων**
	

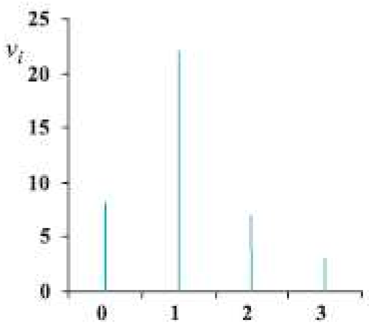
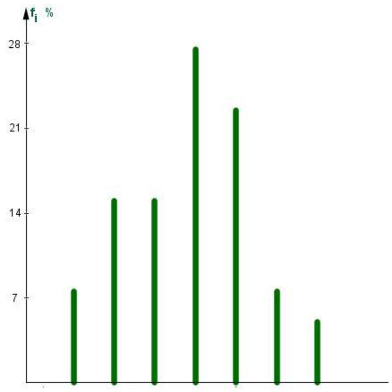
35. Τι ονομάζουμε διάγραμμα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων ; και σε ποιες μεταβλητές το χρησιμοποιούμε ;

Απάντηση :

Το διάγραμμα συχνοτήτων είναι παρόμοιο με το ραβδόγραμμα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων με την μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε x_i μια κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα .

Το διάγραμμα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής .

*Παράδειγμα :

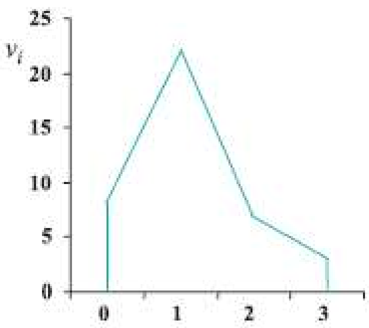
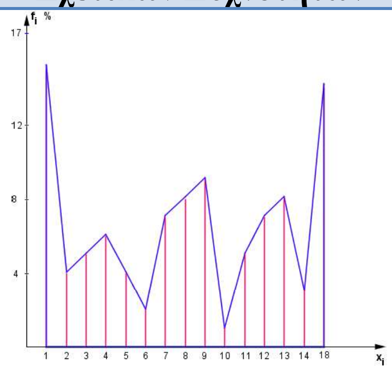
Διάγραμμα	
Συχνοτήτων	**Σχετικών Συχνοτήτων**
	

36. Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων ;

Απάντηση :

Αν ενώσουμε τις κορυφές των των ευθύγραμμων τμημάτων ενός διαγράμματος συχνοτήτων ή διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων θα έχουμε αντίστοιχα το πολύγωνο συχνοτήτων ή το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων .

*Παράδειγμα :

Πολύγωνο	
Συχνοτήτων	**Σχετικών Συχνοτήτων**
	

37. Τι ονομάζουμε κυκλικό διάγραμμα και σε τι μεταβλητές το χρησιμοποιούμε ;

Απάντηση :

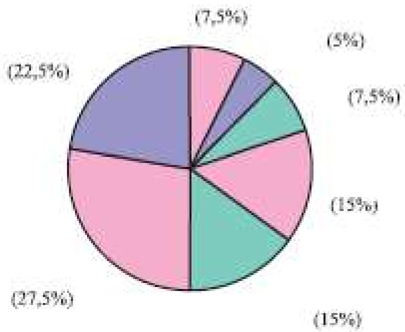
Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς , τα εμβαδά ή , ισοδύναμα τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_iτων τιμών x_i της μεταβλητής .

Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων , τότε :

$$a_i = \nu_i \cdot \frac{360^o}{\nu} = 360^o \cdot f_i$$

Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων

*Παράδειγμα :



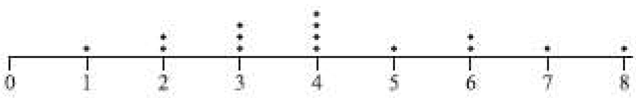
38. Τι ονομάζουμε σημειόγραμμα και σε ποιες μεταβλητές το χρησιμοποιούμε ;

Απάντηση :

Το σημειόγραμμα αποτελείται από έναν οριζόντιο άξονα στον οποίο παριστάνονται οι τιμές της μεταβλητής και πάνω από κάθε μεταβλητή τοποθετούμε μια τελεία , σημείο , το πλήθος των οποίων δίνει την συχνότητα της εκάστου μεταβλητής .

Συνήθως χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας μεταβλητής όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις .

*Παράδειγμα :



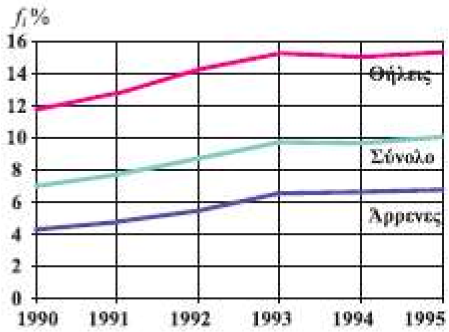
39. Τι ονομάζουμε χρονόγραμμα και σε ποιες μεταβλητές το χρησιμοποιούμε ;

Απάντηση :

Το χρονόγραμμα αποτελείται από έναν οριζόντιο άξονα ο οποίος χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και από έναν κάθετο άξονα ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής

Το χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού , δημογραφικού ή άλλου μεγέθους .

*Παράδειγμα :



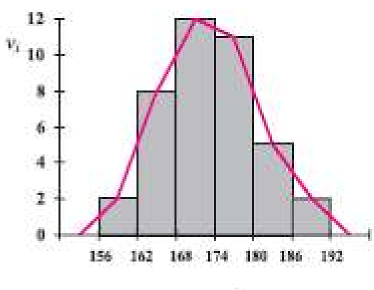
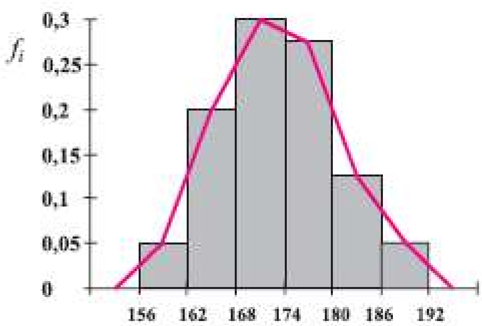
40. Τι ονομάζουμε ιστόγραμμα συχνοτήτων ; και πως κατασκευάζουμε το πολύγωνο συχνοτήτων ;

Απάντηση :

Ιστόγραμμα συχνοτήτων ονομάζουμε τη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα. Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων , σημειώνουμε με κατάλληλη κλίμακα , τα όρια των κλάσεων .Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια ,από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο , ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με την συχνότητα της κλάσης αυτής** .

Αν στο ιστόγραμμα συχνοτήτων υποθέσουμε 2 ακόμη υποθετικές κλάσεις στην αρχή και στο τέλος με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων σχηματίζεται το **πολύγωνο συχνοτήτων**

Ομοίως έχουμε και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων

Ιστόγραμμα & Πολύγωνο	
Συχνοτήτων	**Σχετικών Συχνοτήτων**
	

41. Πως κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων & πως το αντίστοιχο πολύγωνο ;

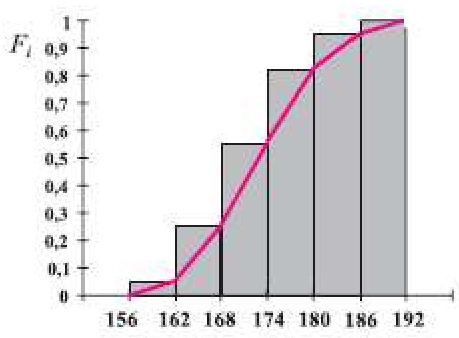
Απάντηση :

Το **ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων** κατασκευάζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με το ιστόγραμμα συχνοτήτων μόνο που στη θέση των συχνοτήτων βάζουμε τις αθροιστικές συχνότητες

Για να κατασκευάσουμε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων **ενώνουμε τα δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των **άνω βάσεων** των ορθογωνίων και σχηματίζεται το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**

Ιστόγραμμα & Πολύγωνο

Αθροιστικών Συχνοτήτων

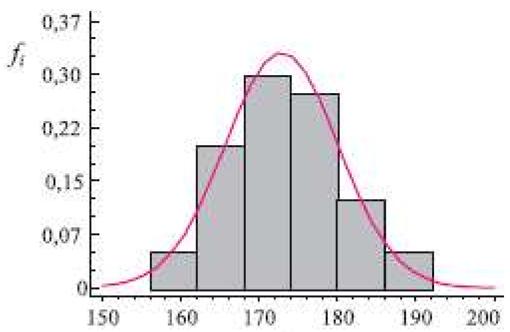


42. Τι ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων ;

Απάντηση :

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό , τότε η πολυγωνική γραμμή τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης , η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων** .

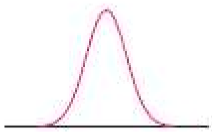
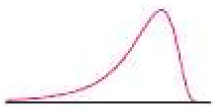
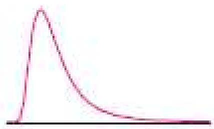
Καμπύλη Συχνοτήτων



43. Να αναφέρετε μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων

Απάντηση :

- <u>Ομοιόμορφη κατανομή :</u> όταν οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$
- <u>Κανονική κατανομή :</u> οι περισσότερες παρατηρήσεις είναι γύρω από το κέντρο και οι υπόλοιπες κατανέμονται συμμετρικά εκατέρωθεν του κέντρου
- <u>Ασύμμετρη κατανομή με αρνητική ασυμμετρία :</u> οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται δεξιά του κέντρου
- <u>Ασύμμετρη κατανομή με θετική ασυμμετρία :</u> οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται αριστερά του κέντρου

Καμπύλες Συχνοτήτων			
Ομοιόμορφη κατανομή	**Κανονική κατανομή**	**Αρνητική ασυμμετρία**	**Θετική ασυμμετρία**
			

44. Τι ονομάζουμε μέτρα θέσης και ποια είναι ;

Απάντηση :

Μέτρα θέσης είναι τα μέτρα που χρησιμοποιούνται για να μας δίνουν την θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα .

Τέτοια είναι η μέση τιμή , ο σταθμικός μέσος , η διάμεσος

45. Πως υπολογίζουμε την μέση τιμή ;

Απάντηση :

- Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, .., t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από την σχέση :

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + .. + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

- Σε μια κατανομή συχνοτήτων , αν $x_1, x_2, .., x_\kappa$, είναι οι τιμές της μεταβλητής X , με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, .., \nu_\kappa$ αντίστοιχα , η μέση τιμή δίνεται από την σχέση :

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + .. + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\sum x_i\nu_i}{\sum \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i$$

Ενώ η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

46. Τι ονομάζουμε σταθμικό μέσο και ποιος ο τύπος του ;

Απάντηση :

Σε περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1, x_2, .., x_\nu$, ενός συνόλου δεδομένων τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο και σε κάθε τιμή αντιστοιχεί διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, .., w_\nu$ και δίνεται από τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + .. + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + .. + w_\nu} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

47. Τι ονομάζουμε διάμεσο ;

Απάντηση :

Διάμεσο (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση , όταν το ν είναι περιττός αριθμός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος .

48. Τι ονομάζουμε μέτρα διασποράς και ποια είναι ;

Απάντηση :

Μέτρα διασποράς ονομάζουμε τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης .

Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι : το εύρος , η διακύμανση και η τυπική απόκλιση .

49. Τι ονομάζουμε εύρος ;

Απάντηση :

Το εύρος ορίζεται ως η διαφορά της μεγαλύτερης παρατήρησης από την μικρότερη παρατήρηση και συμβολίζεται με το R

50. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι ίσος με το μηδέν

Απόδειξη :

Έστω $t_1, t_2, t_3, .., t_\nu$ οι μεταβλητές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν με μέση τιμή $\bar{x}$. Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών , δηλαδή

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + .. + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{\sum(t_i - \bar{x})}{\nu}$$

Είναι ίσος με μηδέν .

Έχουμε :

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + .. + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + .. + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

51. Πως υπολογίζουμε την διακύμανση ;

Απάντηση :

- Τύπος διακύμανσης :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$$

- Όταν η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος αριθμός τότε παίρνουμε τον τύπο :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t^2{}_i - \frac{(\sum t_i)^2}{\nu}\right\}$$

- Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η ομαδοποιημένα δεδομένα παίρνουμε τον τύπο :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2\nu_i$$

ή με την ισοδύναμη μορφή :

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2\nu_i - \frac{(\sum x_i\nu_i)^2}{\nu}\right\}$$

52. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ;

Απάντηση :

Ο συντελεστής μεταβολής ορίζεται από τον λόγο :

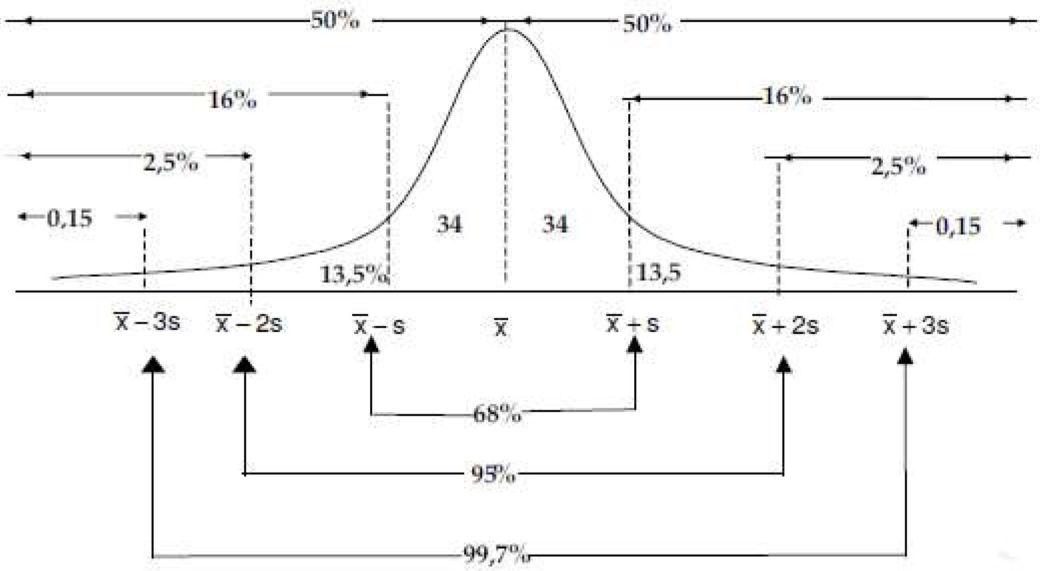
$$CV = \frac{τυπική\ απόκλιση}{μέση\ τιμή}100\% = \frac{s}{\bar{x}}100\%$$

Ο συντελεστής μεταβολής μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών , που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης , αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές .

- Αν $\bar{x} < 0$, τότε αντί της $\bar{x}$, χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$
- Αν ο συντελεστής μεταβολής είναι **μικρότερος ή ίσος από 10%** τότε το δείγμα είναι **ομοιογενές** , ενώ αντίστοιχα αν είναι **μεγαλύτερο από 10% είναι ανομοιογενές** .

53. Να αναφέρετε τα ποσοστά των παρατηρήσεων , όταν έχουμε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή

Απάντηση :



54. Τι αλλάζει σε μέση τιμή και τυπική απόκλιση αν έχουμε :

$$y_i = x_i + c\ , y_i = cx_i\ , y_i = \alpha x_i + \beta$$

Απάντηση :

Έστω $x_1, x_2, .., x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s

Αν $y_1, y_2, .., y_\nu$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τους τύπους :

- $y_i = x_i + c\ , τότε\ έχουμε\ \bar{y} = \bar{x} + c\ και\ s_y = s_x$
- $y_i = cx_i\ , τότε\ έχουμε\ \bar{y} = c\bar{x}\ \ και\ s_y = cs_x$
- $y_i = \alpha x_i + \beta\ , τότε\ έχουμε\ \bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta\ και\ s_y = |\alpha|s_x$